# پاسخنامه آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۱ تاریخ آزمون: ۱۳۹۴/۸/۲۱

۱. عدد $8-8\sqrt{3}i$ را بشکل قطبی نوشته و سپس ریشه های چهارم آن را بیابید.

حل:

$$8-8\sqrt{3}i=8\left(1-\sqrt{3}i\right)=8\left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)=\boxed{16e^{-\frac{\pi}{3}i}}$$

حال طبق قضیه دموآور داریم:

$$z_0=re^{i\theta_0}\quad\rightarrow\quad\boxed{\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{\theta_0+2k\pi}{n}i\right),\qquad k=0,1,\dots,n-1}$$

$$\rightarrow\quad\sqrt[4]{16e^{-\frac{\pi}{3}i}}=2e^{\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}i}=2e^{-\frac{\pi}{12}i},2e^{\frac{5\pi}{12}i},2e^{\frac{11\pi}{12}i},2e^{\frac{17\pi}{12}i}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6}=2\cos^2\frac{\pi}{12}-1=1-2\sin^2\frac{\pi}{12}}\ \rightarrow\ 2e^{-\frac{\pi}{12}i}=2\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)=\boxed{\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$2e^{\frac{5\pi}{12}i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\boxed{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

$$2e^{\frac{11\pi}{12}i}=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\boxed{\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$2e^{\frac{17\pi}{12}i}=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)=2\left(-\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\boxed{\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

۲. یکی از دو مسئله زیر را حل کنید:

الف) حد روبرو را بدست آورده و سپس آن را ثابت کنید: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-2^x}$

ب) همه اکسترمم های (مطلق و نسبی) تابع $f(x)=x+\sqrt{-x^2+2}$ را بیابید.

حل (الف) با توجه به اینکه $2^x$ به صفر میل می کند (وقتی $x\to-\infty$) لذا بسادگی حد محاسبه می شود:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-2^x}=+\infty$$

برای اثبات حد باید نشان دهیم:

$$\forall M>0\ \ \exists N>0,\ \ x<N\ \ \rightarrow\ \ f(x)>M$$

با فرض $N\le-1$ داریم $x^2>N^2$ و لذا :

پس کافیست $\boxed{N=\min\{-1,-\sqrt{M}\}}$

توجه: دقت کنیم باتوجه به اینکه متغیر به سمت منفی بی نهایت می رود لذا برای N تنها می‌توان ماکزیمم (نظیر ۱- در بالا) قائل شد و امکان کران پایین در چنین حالتی میسر نیست. بدیهی است اگر متغیر به سمت مثبت بی نهایت رود N را فقط می توان با کران پایین (مینیمم) محدود کرد.

حل (ب) باتوجه به اینکه دامنه تابع $f(x)=x+\sqrt{-x^2+2}$ بصورت $D_f=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ است و تابع درون این بازه مشتق پذیر است، اکسترمم نسبی تابع برابر است با:

$$\acute{f}(x)=0\ \rightarrow\ 1+\frac{-x}{\sqrt{-x^2+2}}=0\ \rightarrow\ \sqrt{-x^2+2}=x\ \rightarrow\ x=\pm1\ \rightarrow \boxed{x=1}\ \text{قابل قبول}$$

| $x$ | $-\sqrt{2}$ | $1$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\acute{y}$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $-\sqrt{2}$ | $2$ | $\sqrt{2}$ |

حال باتوجه به علامت مشتق در اطراف نقطه $x=1$ مشخص می شود که تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد که البته مطلق نیز محسوب می شود. از طرفی باتوجه به مقادیر مرزی هم معلوم می شود که تابع در $x=-\sqrt{2}$ مینیمم مطلق می گیرد.

۳. بدون استفاده از قاعده هوپیتال، سه تا از حدود زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}}{1-2x^2}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}}{\left(1-2x^2\right)^{1/x^2}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-2}}=\boxed{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\tan x)^{\cos x/\sin x\times\frac{1}{\cos x}}}{(1+\sin x)^{1/\sin x}}=\frac{e}{e}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cosh x}{\ln\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}}=\boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}=\lim_{x\to0}\frac{x+\ln(x^2e^{-x}+1)}{2x+\ln(x^4e^{-2x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2e^{-x}}{2x+x^4e^{-2x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+xe^{-x}}{2+x^3e^{-2x}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

نکته: در محاسبات فوق از دستورهای هم ارزی زیر استفاده شده است:

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\qquad (1+x)^{\frac{1}{x}}\sim e\qquad 1-\cosh x\sim-\frac{x^2}{2}\qquad \ln(x+1)\sim x$$

توجه کنیم که هریک از حدود بدست آمده را می توان به کمک هوپیتال آزمود. بعنوان مثال برای حد (۱):

$$y=\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}\to\ln y=\frac{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}{x^2}\to\lim_{x\to0}\ln y\xrightarrow{\textbf{Hop}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\frac{-\sin x\cos 2x+2\sin x\cos x}{\cos^2 2x}}{\frac{\cos x}{\cos 2x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x(1-2x^2)+4x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{2x}=\frac{3}{2}\to\lim_{x\to0}y=\boxed{e^{\frac{3}{2}}}$$

---

۴. نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-1-x} & x\le-1\\ -\sqrt{x-1} & 1<x\end{cases}$$

بر بازه $\mathbb{R}-[-1,1]$ پیوسته و معکوس پذیر است ولی معکوس آن پیوسته نیست.

حل: ابتدا توجه کنیم که حوزه تعریف تابع $(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$ است اما حوزه بررسی مورد مسئله بازه $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ است، لذا برای تحقیق در پیوستگی، تابع در نقاط درونی (غیرمرزی) می بایست پیوسته باشد و در نقاط مرزی ۱ و ۱- تنها می بایست بترتیب دارای حدود راست و چپ باشند:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}-\sqrt{x-1}=0,\quad \lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\sqrt{-1-x}=0$$

$$\forall x_0\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\ \to\ \lim_{x\to x_0}f(x)=\begin{cases}\sqrt{-1-x_0} & x_0\in(-\infty,-1)\\ -\sqrt{x_0-1} & x_0\in(1,\infty)\end{cases}$$

همچنین تابع داده شده معکوس پذیر است زیرا هریک ضابطه های داخلی خود توابعی یکنوا بوده و اشتراک برد آنها تهی است. در نتیجه توابع معکوس پذیر خواهند بود:

$$x\le-1\ \to\ f(x)=y=\sqrt{-1-x}\ \to y\ge0\ \ \&\ \ f^{-1}(x)=-(x^2+1)$$

$$x>1\ \to\ f(x)=y=-\sqrt{x-1}\ \to y<0\ \ \&\ \ f^{-1}(x)=(x^2+1)$$

$$\to\ \boxed{(-\infty,0)\cap[0,\infty)=\emptyset}\ \to\ \text{تابع معکوس‌پذیر است}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-(x^2+1) & x\ge0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$$

همچنین باتوجه به ضابطه معکوس تابع و اینکه توابع داخل مقدماتی هستند و در بازه های تعریف پیوسته هستند، تنها در نقطه مرزی نیاز به بررسی می باشد که در نقطه مرزی، معکوس تابع ناپیوسته است:

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}f^{-1}(x)=-1\neq1=\lim_{x\to0^-}f^{-1}(x)}$$

---

۵. مشتق تابع زیر را بدست آورید:

$$y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b,\qquad a,b>0$$

حل: باتوجه به ضابطه با گرفتن لگاریتم به پایه $e$ داریم:

$$\ln y = \ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)^x + \ln\left(\frac{b}{x}\right)^a + \ln\left(\frac{x}{a}\right)^b$$

$$= x\ln\left(\frac{a}{b}\right) + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a)$$

حال با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$\frac{\acute{y}}{y} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x} \quad \rightarrow \boxed{\acute{y} = \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b-a}{x}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

---

۶. با استفاده از قضایای مشتق، تنها یکی از دو نامساوی زیر را ثابت کنید:

الف) نشان دهید که برای هر $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ نامساوی $\frac{x^2}{2} \geq 1 - \cos x$ برقرار است.

ب) نشان دهید که برای هر $0 < a < b$ همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

حل (الف): قرار دهید:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

در آنصورت

$$\acute{f}(x) = x - \sin x, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

تابع $g(x) = \acute{f}(x)$ در فاصله فوق صعودی است زیرا:

$$\acute{g}(x) = 1 - \cos x \geq 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

بنابراین باتوجه به صعودی بودن تابع g برای هر $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$g(x) \geq g(0) = 0 \ \rightarrow \ \acute{f}(x) \geq 0 \ \rightarrow \ f \text{ صعودی است } \ \rightarrow \ f(x) \geq f(0) = 0 \ \rightarrow \ \boxed{\frac{x^2}{2} \geq 1 - \cos x}$$

حل (ب): با بکارگیری قضیه لاگرانژ برای بازه $[a,b]$ و باتوجه به پیوستگی تابع $f(x)=\ln x$ در این فاصله و مشتق پذیری آن درون این بازه داریم:

$$\exists c \in (a,b) \ \text{s.t.} \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \& \quad \frac{1}{b} < f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \frac{b-a}{b} < f(b)-f(a) < \frac{b-a}{a} \ \rightarrow \ \boxed{\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}}$$

---

**E.P._Sun-Nov 15, 2015**